Cours de mathématiques M.P.S.I.

D'après les cours de M. De Granrut

Henriet Quentin
Ausseil Lucas
Perard Arsène
Philipp Maxime

Espaces vectoriels

1. Structure d'espace vectoriel

1.1. Définition et exemples

Définition :

Soit $\mathbb{K}$ un corps ($\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}$). On appelle espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$-ev tout ensemble $(E, +, \times)$ tel que :

1. $(E, +)$ est un groupe commutatif
2. $\forall x, y \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$
3. $\forall x \in E,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ (\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$ et $\lambda(\mu x) = (\lambda \mu) x$
4. $\forall x \in E,\ x.1_{\mathbb{K}} = x$.

Définition :

On dit que $\times$ est une loi externe. Les éléments de $\mathbb{K}$ s'appellent des scalaires.

On note 0_E ou $\vec{0}$ l'élément neutre de E. Les éléments de E s'appelent des vecteurs.

Exemple :

$\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-ev. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-ev.

$\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-ev, $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (n-uplet)

$0_{\mathbb{K}^n} = (0, 0, \ldots, 0)$

Exemple :

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-ev : $E \times F = \{(\vec{x}, \vec{y}),\ \vec{x} \in E,\ \vec{y} \in F\}$

$(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{z}, \vec{t}) = (\vec{x}+\vec{z}, \vec{y}+\vec{t})$ et $\lambda(\vec{x}, \vec{y}) = (\lambda\vec{x}, \lambda\vec{y})$

On admet que $(E \times F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev. $\overrightarrow{0_{E\times F}} = (\vec{0}_E, \vec{0}_F)$.

Exemple :

Si X est un ensemble non vide quelconque et E un $\mathbb{K}$-ev.

E^X est l'ensemble des applications f qui vont de X dans E.

$f+g \ = \ x \mapsto f(x) + g(x)$

$\lambda f \ = \ x \mapsto \lambda f(x)$

$0_{E^X} \ = \ x \mapsto 0_E$

On admet que $(E^X, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev.

Exemples :

- $X = I,\ E = \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{R}^I$ est l'ensemble des fonctions réelles définies sur I
- $X = \mathbb{N},\ E = \mathbb{K}$ $\quad \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites
- $\mathbb{K}[X]$, l'ensemble des polynômes
- $X = [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!],\ E = \mathbb{K}$ $\quad \mathbb{K}^X = \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

1.2. Règles de calcul

Propriétés :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev.

1. $\forall \vec{x} \in E,\ 0 \cdot \vec{x} = 0$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$
3. $\forall (\lambda, \vec{x}) \in \mathbb{K} \times E,\ \lambda \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $\vec{x} = \vec{0}$
4. $\forall \vec{x} \in E,\ (-1) \cdot \vec{x} = -\vec{x}$
5. $\forall \vec{x} \in E,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ (\lambda - \mu)\vec{x} = \lambda \vec{x} - \mu \vec{x}$
6. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda(\vec{x} - \vec{y}) = \lambda \vec{x} - \lambda \vec{y}$.

Preuve partielle :

2. $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ donc $\lambda \vec{0} + \lambda \vec{0} = \lambda \vec{0}$

   On pose $\vec{x} = \lambda \vec{0}$

   $\vec{x} + \vec{x} = \vec{x} \ \Leftrightarrow\ \vec{x} + \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{x} + (-\vec{x})$

   $\Leftrightarrow\ \vec{x} + \vec{0} = \vec{0} \ \Leftrightarrow\ \vec{x} = \vec{0} \ \Leftrightarrow\ \lambda \vec{0} = \vec{0}$

4. $(-1) \cdot \vec{x} = -\vec{x} \ \Leftrightarrow\ (-1) \cdot \vec{x} + \vec{x} = \vec{0} \ \Leftrightarrow\ (-1) \cdot \vec{x} + (1) \cdot \vec{x} = \vec{0}$

   $\Leftrightarrow\ (-1+1) \cdot \vec{x} = \vec{0} \ \Leftrightarrow\ 0\vec{x} = \vec{0}$ Vrai.

1.3. Combinaison linéaire

Définition :

Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $n \in \mathbb{N}^*$, $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ n vecteurs de E.

On appelle combinaison linéaire de ces n vecteurs tout vecteur $\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{x}_k,\ \lambda_k \in \mathbb{K}$.

On peut généraliser avec une famille $\mathscr{F}$ quelconque de vecteurs de E en ne considérant que des sommes finies.

2. Sous-espaces vectoriels

2.1. Définition

Définition :

Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $F\subset E$. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si F est stable pour $+$ et $\cdot$, c'est-à-dire :
$-\forall \vec{x},\vec{y}\in F,\ \ \vec{x}+\vec{y}\in F$
$-\forall \vec{x},\vec{y}\in F,\ \ \forall \lambda\in\mathbb{K},\ \ \lambda\vec{x}\in F.$

Théorème de caractérisation :

Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $F\subset E$.

$$F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \Leftrightarrow \begin{cases} F\neq\varnothing \\ \forall \vec{x},\vec{y}\in F,\ \ \vec{x}+\vec{y}\in F \\ \forall \vec{x}\in F,\ \ \forall\lambda\in\mathbb{K},\ \ \lambda\vec{x}\in F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F\neq\varnothing \\ \forall \vec{x},\vec{y}\in F,\ \ \forall\lambda,\mu\in\mathbb{K},\ \ \lambda\vec{x}+\mu\vec{y}\in F \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F\neq\varnothing \\ \forall \vec{x},\vec{y}\in F,\ \ \forall\lambda\in\mathbb{K},\ \ \lambda\vec{x}+\vec{y}\in F \end{cases}$$

Remarques :

- Pour montrer que $F\neq\varnothing$, vérifier que $\vec{0_E}\in F$.
- $\{\vec{0_E}\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.

Proposition :

L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve de la proposition :

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

· $F\cap G\subset E$ et $F\cap G\neq\varnothing$ car $0_E\in F$ et $0_E\in G$.
· $\forall \vec{x},\vec{y}\in F\cap G,\ \ \forall\lambda\in\mathbb{K},\ \ \vec{x},\vec{y}\in F$ et $\vec{x},\vec{y}\in G$
$\lambda\vec{x}+\vec{y}\in F$ car F sous-espace vecoriel.
$\lambda\vec{x}+\vec{y}\in G$ car G sous-espace vecoriel.
Donc $\lambda\vec{x}+\vec{y}\in F\cap G$.

Donc $F\cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

2.2. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Définition :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, X une partie non vide de E. On appelle sous-espace vectoriel engendré par X et on note $\text{Vect}(X)$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de X.

Exemples :

$\text{Vect}(\vec{0})=\{\vec{0}\}$
Si $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\text{Vect}(\vec{a})=\{\lambda\vec{a},\ \ \lambda\in\mathbb{K}\}$
$\text{Vect}(1,X,X^2)=\mathbb{K}_2[X]$

Propriétés :

- $\text{Vect}(X)$ est un sous-espace vectoriel de E.
- $\text{Vect}(X)$ est le plus petit sous-espace vectoriel qui contient X.
- $X\subset Y \Rightarrow \text{Vect}(X)\subset\text{Vect}(Y)$.
- Si F est un sous-espace vectoriel de E, $\text{Vect}(F)=F$.

2.3. Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On appelle somme de F et G et on note $F+G=\{\vec{y}+\vec{z},\ \ \text{avec } \vec{y}\in F,\ \ \vec{z}\in G\}$.

Proposition :

$F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve :

· $F+G\subset E$ car $F\subset E$ et $G\subset E$, et $\vec{0_E}+\vec{0_E}=\vec{0_E}\in F+G$ (F et G sous-espaces vectoriels), donc $F+G\neq\varnothing$.
· $\forall \vec{x},\vec{x}'\in F+G,\ \ \forall\lambda\in\mathbb{K},\ \ \exists(\vec{y},\vec{z})\in F\times G$ tel que $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$ et $\exists(\vec{y}',\vec{z}')\in F\times G$ tel que $\vec{x}'=\vec{y}'+\vec{z}'$
$\lambda\vec{x}+\vec{x}'=\lambda\vec{y}+\lambda\vec{z}+\vec{y}'+\vec{z}'=\underbrace{\lambda\vec{y}+\vec{y}'}_{\in F}+\underbrace{\lambda\vec{z}+\vec{z}'}_{\in G}$ (F et G sous-espaces vectoriels) Donc $\lambda\vec{x}+\vec{x}'\in F+G$

Donc $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

2.4. Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit que F et G sont supplémentaires si tout vecteur de E se décompose de manière unique en la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G, c'est-à-dire si $\forall \vec{x} \in E$, $\exists! (\vec{y}, \vec{z}) \in F \times G$ tel que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$.
On écrit $F \oplus G = E$ («somme directe»).

Proposition :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow \begin{cases} E = F + G \\ F \cap G = \{\vec{0}\} \end{cases}$$

Preuve :

$\Rightarrow$: · $F + G \subset E$ et $\forall \vec{x} \in E$, $\exists! (\vec{y}, \vec{z}) \in F \times G$ tel que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ Donc $E \subset F + G$, Donc $E = F + G$.

· $\vec{0} \in F \cap G$, et $\forall \vec{x} \in F \cap G$:

$\vec{x} \in E$ donc $\vec{x}$ se décompose en la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G : $\vec{x} = \underset{\in F}{\vec{x}} + \underset{\in G}{\vec{0}} = \underset{\in F}{\vec{0}} + \underset{\in G}{\vec{x}}$

Par unicité de la décomposition, $\vec{x} = \vec{0}$ Donc $F \cap G = \{\vec{0}\}$

$\Leftarrow$: $E = F + G$ $\rightarrow$ Existence.

Supposons $\exists (\vec{y}, \vec{z}), (\vec{y}', \vec{z}') \in F \times G$ tels que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z} = \vec{y}' + \vec{z}'$

Alors $\underbrace{\vec{y} - \vec{y}'}_{\in F} = \underbrace{\vec{z} - \vec{z}'}_{\in G}$ Or, $F \cap G = \{\vec{0}\}$ Donc $\vec{y} - \vec{y}' = \vec{z} - \vec{z}' = \vec{0}$ $\rightarrow$ Unicité.

3. Sous-espaces affines

3.1. Translations

Définition :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. On appelle translation de E toute application de E dans E de la forme : $\vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{a}$ où $\vec{a} \in E$.
On la note $t_{\vec{a}}$.

Propriétés :

- $\forall \vec{a}, \vec{b} \in E$, $t_{\vec{a}+\vec{b}} = t_{\vec{a}} \circ t_{\vec{b}} = t_{\vec{b}} \circ t_{\vec{a}}$
- $\forall \vec{a} \in E$, $t_{\vec{a}}$ est bijective et $t_{\vec{a}}^{-1} = t_{-\vec{a}}$
- φ : $\begin{array}{ccc} (E, +) & \rightarrow & (T_E, \circ) \\ \vec{a} & \mapsto & t_{\vec{a}} \end{array}$ (où $T_E = \{$translations de $E\}$), est un isomorphisme surjectif (par définition) et injectif ($\mathrm{Ker}(\varphi) = \{\vec{a} \in E$ tels que $t_{\vec{a}} = \mathrm{id}_E\} = \{\vec{0}_E\}$)

3.2. Sous-espace affine

Définition :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. On appelle sous-espace affine de E l'image d'un sous-espace vectoriel de E par une translation.
W est un sous-espace affine si $\exists \vec{a} \in E$ et $\exists F$ sous-espace vectoriel de E tels que $W = t_{\vec{a}}(F) = \{\vec{a} + \vec{y}$ avec $\vec{y} \in F\}$
On note $W = \vec{a} + F$.

Remarques :

- $\vec{a}$ n'est pas unique. $\vec{a} \in W$.
- F est unique, on le note parfois $\vec{W}$. On l'appelle direction de W.
- $\forall \vec{b} \in W$, $W = \vec{b} + F$.
- $F = \{\vec{x} - \vec{a}$, avec $\vec{x} \in W$, $\vec{a} \in W\}$.

Définition :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $W=\vec{a}+F$ et $V=\vec{b}+G$ deux sous-espaces affines de E. On dit que W est parallèle à V si $F\subset G$.

Proposition :

L'intersection de deux sous-espaces affines de E est soit vide, soit un sous-espace affine de E.

Preuve :

Soient $W=\vec{a}+F$ et $W'=\vec{b}+G$

Si $W\cap W'\neq\emptyset$, $\exists\vec{c}\in W\cap W'$: alors $W=\vec{c}+F$ et $W'=\vec{c}+G$

Il suffit alors de montrer que $W\cap W'=\vec{c}+F\cap G$

$\subset$: $\forall\vec{x}\in W\cap W'$, $\exists\vec{u}\in F$ tel que $\vec{x}=\vec{c}+\vec{u}$ et $\exists\vec{v}\in G$ tel que $\vec{x}=\vec{c}+\vec{v}$

Par soustraction, $\vec{u}=\vec{v}\in F\cap G$ Donc $\vec{x}\in\vec{c}+F\cap G$, donc $W\cap W'\subset\vec{c}+F\cap G$

$\supset$: $\forall\vec{x}\in\vec{c}+F\cap G$, $\exists\vec{u}\in F\cap G$ tel que $\vec{x}=\vec{c}+\vec{u}$

$\vec{x}\in W$ car $\vec{u}\in F$ et $\vec{x}\in W'$ car $\vec{u}\in G$

Donc $W\cap W'=\vec{c}+F\cap G$, donc $W\cap W'$ est un sous-espace affine de direction $F\cap G$.

Remarque :

On appelle parfois les éléments des sous-espaces affines des points :

Si W est un sous-espace affine de direction F, et $A,B\in W$, $W=A+F$ $B=A+\vec{u}$ $\vec{u}=B-A=\overrightarrow{AB}$

4. Applications linéaires

4.1. Définition

Définition :

Soit E,F deux $\mathbb{K}$-ev, $f\in F^E$.

On dit que f est linéaire si :

$-\forall\vec{x},\vec{y}\in E$, $f(\vec{x}+\vec{y})=f(\vec{x})+f(\vec{y})$

$-\forall\vec{x}\in E$, $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $f(\lambda\vec{x})=\lambda f(\vec{x})$

Remarque :

f linéaire $\Leftrightarrow\forall\vec{x},\vec{y}\in E,\ \forall\lambda,\mu\in\mathbb{K},\ f(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y})=\lambda f(\vec{x})+\mu f(\vec{y})$

$\Leftrightarrow\forall\vec{x},\vec{y}\in E,\ \forall\lambda\in\mathbb{K},\ f(\lambda\vec{x}+\vec{y})=\lambda f(\vec{x})+f(\vec{y})$

Remarque :

f est linéaire $\Rightarrow f(\overrightarrow{0_E})=\overrightarrow{0_F}$.

Définitions :

On dit que f est un endomorphisme si f est linéaire et si $E=F$.

On dit que f est un isomorphisme si f est linéaire et bijective.

On dit que f est un automorphisme si f est linéaire, bijective, et si $E=F$.

On dit que f est une forme linéaire si f est linéaire et si $F=\mathbb{K}$.

Définitions :

On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

On note $E^*=\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ l'ensemble des formes linéaires de E.

Proposition :

$\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de F^E.

Preuve :

- $\mathscr{L}(E,F)\in F^E$
- $\vec{x}\mapsto\overrightarrow{0_F}$ est linéaire : $\mathscr{L}(E,F)\neq\emptyset$
- $\forall f,g\in\mathscr{L}(E,F)$, $\forall\alpha\in\mathbb{K}$, $\forall\vec{x},\vec{y}\in E$, $\forall\lambda\in\mathbb{K}$,

  $(\alpha f+g)(\lambda\vec{x}+\vec{y})=\alpha f(\lambda\vec{x}+\vec{y})+g(\lambda\vec{x}+\vec{y})=\alpha\lambda f(\vec{x})+\alpha f(\vec{y})+\lambda g(\vec{x})+g(\vec{y})=\lambda(\alpha f+g)(\vec{x})+(\alpha f+g)(\vec{y})$

  Donc $\alpha f+g\in\mathscr{L}(E,F)$

Donc $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de F^E.

4.2. Image et noyau

Définitions :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

On appelle noyau de f l'ensemble $\text{Ker}(f) = \{\vec{x} \in E,\ f(\vec{x}) = \overrightarrow{0_F}\}$ $\quad \vec{x} = \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(\vec{x}) = \overrightarrow{0_F}$

On appelle image de f l'ensemble $\text{Im}(f) = \{f(\vec{x}),\ \vec{x} \in E\}$ $\quad \vec{y} \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow \exists \vec{x} \in E$ tel que $f(\vec{x}) = \vec{y}$

Proposition :

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

$\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E, et $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Preuve :

– $\text{Ker}(f) \subset E$, et $\overrightarrow{0_E} \in \text{Ker}(f)$ car $f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$, donc $\text{Ker}(f) \neq \emptyset$

$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \text{Ker}(f)$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda \vec{u} + \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{v}) = \overrightarrow{0_F}$, donc $\lambda \vec{u} + \vec{v} \in \text{Ker}(f)$

Donc $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

– $\text{Im}(f) \subset F$, et $\overrightarrow{0_F} \in \text{Im}(f)$ car $f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$, donc $\text{Im}(f) \neq \emptyset$

$\forall \vec{y_1}, \vec{y_2} \in \text{Im}(f)$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\exists \vec{x_1} \in E$ tel que $f(\vec{x_1}) = \vec{y_1}$ et $\exists \vec{x_2} \in E$ tel que $f(\vec{x_2}) = \vec{y_2}$

$\lambda \vec{y_1} + \vec{y_2} = \lambda f(\vec{x_1}) + f(\vec{x_2}) = f(\lambda \vec{x_1} + \vec{x_2})$, donc $\lambda \vec{y_1} + \vec{y_2} \in \text{Im}(f)$

Donc $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Proposition :

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. f est injective $\Leftrightarrow$ $\text{Ker}(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$
2. f est surjective $\Leftrightarrow$ $\text{Im}(f) = F$

Remarque :

$\forall f \in \mathscr{L}(E)$, $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ et $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$

En effet, $\forall \vec{x} \in \text{Ker}(f)$, $f^2(\vec{x}) = f(f(\vec{x})) = f(\vec{0}) = \vec{0}$, donc $\vec{x} \in \text{Ker}(f^2)$

$\forall \vec{y} \in \text{Im}(f^2)$, $\exists \vec{x} \in E$ tel que $\vec{y} = f^2(\vec{x}) = f(f(\vec{x})) \in \text{Im}(f)$.

Proposition :

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\text{Ker}(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$.
2. $\forall \vec{x} \in E$, $f(\vec{x}) = \overrightarrow{0_F} \Rightarrow \overrightarrow{0_E}$.
3. f est injective.

Preuve :

1. $\Rightarrow$ 2. : $\forall \vec{x} \in E$, $f(\vec{x}) = \overrightarrow{0_F} \Rightarrow \vec{x} \in \text{Ker}(f)$ Or, $\text{Ker}(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$, donc $\vec{x} = \overrightarrow{0_E}$

2. $\Rightarrow$ 3. : $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$, $f(\vec{x}) = f(\vec{y}) \Rightarrow f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = \vec{0} \Rightarrow f(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} - \vec{y} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{y} \Rightarrow f$ est injective.

3. $\Rightarrow$ 1. : $\overrightarrow{0_E} \in \text{Ker}(f)$ et $\forall \vec{x} \in \text{Ker}(f)$, $f(\vec{x}) = \vec{0} = f(\overrightarrow{0_E})$ Or, f et injective donc $\vec{x} = \overrightarrow{0_E}$, donc $\text{Ker}(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$

Remarque :

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-ev, $f \in F^E$ et $g \in G^F$.

$g \circ f = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.

4.3. Équations linéaires

Définition :

Soient E et f deux $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $\vec{b} \in F$.

On appelle équation linéaire toute expression du type $f(\vec{x}) = \vec{b}$.

Exemples :

– Toute équation différentielle linéaire avec second membre.

– Le système linéaire $\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$ qui donne l'équation $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ $\quad (E = F = \mathbb{R}^2)$

– Toute suite arithmético-géométrique : soit $u_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = a u_n + b$, avec $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, $a \neq 1$

On peut alors poser $f :$ $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (u_n) & \mapsto & (u_{n+1} - a u_n) \end{array}$

Proposition :

L'ensemble des solutions de l'équation linéaire $f(\vec{x})=\vec{b}$ est soit vide, soit un sous-espace affine de direction $\mathrm{Ker}(f)$.

Preuve :

Supposons que $S\neq\emptyset$: $\exists\vec{a}\in E$ tel que $f(\vec{a})=\vec{b}$. Il suffit alors de montrer que $S=\vec{a}+\mathrm{Ker}(f)$.

$\supset$: $\forall\vec{x}\in\vec{a}+\mathrm{Ker}(f)$, $\exists\vec{t}\in\mathrm{Ker}(f)$ tel que $\vec{x}=\vec{a}+\vec{t}$.

$f(\vec{x})=f(\vec{a}+\vec{t})=f(\vec{a})+f(\vec{t})=\vec{b}+\vec{0_F}=\vec{b}$ Donc $\vec{x}\in S$.

$\subset$: $\forall\vec{x}\in S$, $f(\vec{x})=\vec{b}=f(\vec{a})\Rightarrow f(\vec{x}-\vec{a})=\vec{0_F}\Rightarrow\vec{x}-\vec{a}\in\mathrm{Ker}(f)$

Or, $\vec{x}=\vec{a}+\underbrace{\vec{x}-\vec{a}}_{\in\mathrm{Ker}(f)}\in\vec{a}+\mathrm{Ker}(f)$

Donc $S=\vec{a}+\mathrm{Ker}(f)$: S est un sous-espace affine de direction $\mathrm{Ker}(f)$.

Remarque :

Si f est surjective, alors $S\neq\emptyset$.
Si f est injective, alors $\mathrm{Card}(S)=1$.

Exemple :

Si on reprend la suite arithmético-géométrique précédente :

– Solution de l'équation homogène : il suffit de trouver $\mathrm{Ker}(f)$.

$(u_n)\in\mathrm{Ker}(f)\Leftrightarrow\forall n,\ u_{n+1}=a\,u_n\Leftrightarrow(u_n)$ est géométrique de raison $a\Leftrightarrow u_n=u_0a^n\Leftrightarrow(u_n)\in\mathrm{Vect}\big((a^n)\big)$

– Il reste à trouver une solution particulière à l'équation $u_{n+1}=a\,u_n+b$: on cherche une suite constante $u_n=c$.

$$c=ac+b\Leftrightarrow c=\frac{b}{1-a}\quad(a\neq1)$$

Donc $S=c+\mathrm{Vect}\big((a^n)\big)$: $\exists\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $u_n=c+\lambda a^n$

$u_0=c+\lambda\Leftrightarrow\lambda=u_0-c$

Donc $u_n=c+(u_0-c)a^n$.

4.4. Composition d'applications linéaires

Proposition :

La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

Preuve :

Soient E,F,G trois $\mathbb{K}$-ev, $f\in\mathscr{L}(E,F)$, $g\in\mathscr{L}(F,G)$

$\forall\vec{x_1},\vec{x_2}\in E$, $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $g\circ f(\lambda\vec{x_1}+\vec{x_2})=g(\lambda f(\vec{x_1})+f(\vec{x_2}))=\lambda g\circ f(\vec{x_1})+g\circ f(\vec{x_2})$ Donc $g\circ f$ est linéaire.

Proposition :

Soient φ : $\begin{array}{ccc}\mathscr{L}(E,F) & \to & \mathscr{L}(E,G)\\ f & \mapsto & g\circ f\end{array}$ et ψ : $\begin{array}{ccc}\mathscr{L}(F,G) & \to & \mathscr{L}(E,G)\\ g & \mapsto & g\circ f\end{array}$

φ et ψ sont linéaires.

Preuve :

– $\forall f_1,f_2\in\mathscr{L}(E,F)$, $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $\forall\vec{x}\in E$,

$\varphi(\lambda f_1+f_2)(\vec{x})=g\circ(\lambda f_1+f_2)(\vec{x})=\lambda g\circ f_1(\vec{x})+g\circ f_2(\vec{x})=\big(\lambda\varphi(f_1)+\varphi(f_2)\big)(\vec{x})$ Donc φ est linéaire.

– $\forall g_1,g_2\in\mathscr{L}(F,G)$, $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $\forall\vec{x}\in E$,

$\psi(\lambda g_1+g_2)(\vec{x})=(\lambda g_1+g_2)\circ f(\vec{x})=\lambda g_1\circ g(\vec{x})+g_2\circ f(\vec{x})=\big(\lambda\psi(g_1)+\psi(g_2)\big)(\vec{x})$ Donc ψ est linéaire.

Remarques :

– $\begin{cases}g\circ(f_1+f_2)=g\circ f_1+g\circ f_2\\(g_1+g_2)\circ f=g_1\circ f+g_2\circ f\end{cases}\to$ propriété de distributivité.

– $\big(\mathscr{L}(E),+,\circ\big)$ est un anneau.

– On note parfois $g\,f$ pour $g\circ f$, f^2 pour $f\circ f$, f^n pour $f\circ\ldots\circ f$.

4.5. Groupe linéaire

Proposition :

La bijection réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

Preuve :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une fonction bijective.

Alors $f^{-1} : F \to E$ est bijective, et $\forall \vec{y_1}, \vec{y_2} \in F$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\exists! \vec{x_1} \in E$ tel que $\vec{y_1} = f(\vec{x_1})$, $\exists! \vec{x_2} \in E$ tel que $\vec{y_2} = f(\vec{x_2})$

$f^{-1}(\lambda \vec{y_1} + \vec{y_2}) = f^{-1}\left(\lambda f(\vec{x_1}) + f(\vec{x_2})\right) = f^{-1}\left(f(\lambda \vec{x_1} + \vec{x_2})\right) = \lambda \vec{x_1} + \vec{x_2} = \lambda f^{-1}(\vec{y_1}) + f^{-1}(\vec{y_2})$ Donc f^{-1} est linéaire.

Proposition :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev.

L'ensemble des automorphismes de E est un groupe pour la loi $\circ$ appelé groupe linéaire de E, noté $GL(E)$.

Preuve :

$\circ$ est une loi de composition interne dans $GL(E)$: la composée de deux automorphismes de E est un automorphisme de E. $\circ$ est associative. Le neutre est Id_E. Tout automorphisme admet une bijection réciproque qui est encore un automorphisme.

5. Projecteurs et symétries

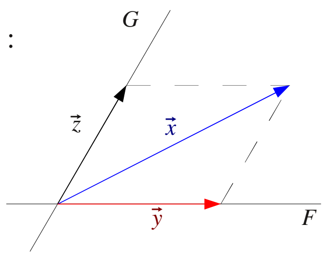
5.1. Projection

Définition :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E :

$\forall \vec{x} \in E$, $\exists! (\vec{y}, \vec{z}) \in F \times G$ tel que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$

On appelle projection sur F parallèlement à G l'application $p : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{y} \end{array}$



Proposition :

1. p est linéaire et $p \circ p = p$
2. $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) = F$
3. $\mathrm{Ker}(p) = G$.

Preuve :

1. $\forall \vec{x}, \vec{x}' \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\exists! (\vec{y}, \vec{z}) \in F \times G$ tel que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ et $\exists! (\vec{y}', \vec{z}') \in F \times G$ tel que $\vec{x}' = \vec{y}' + \vec{z}'$.

   $p(\vec{x}) = \vec{y}$ et $p(\vec{x}') = y'$, et $\lambda \vec{x} + \vec{x}' = \underbrace{\lambda y + y'}_{\in F \text{ (s.e.v.)}} + \underbrace{\lambda z + z'}_{\in G \text{ (s.e.v.)}}$ (il s'agit de l'unique décomposition de $\lambda \vec{x} + \vec{x}'$)

   Donc $p(\lambda \vec{x} + \vec{x}') = \lambda \vec{y} + \vec{y}' = \lambda p(\vec{x}) + p(\vec{x}')$ Donc p est linéaire.

   $p \circ p(\vec{x}) = p(\vec{y})$, Or, $\vec{y} = \underbrace{\vec{y}}_{\in F} + \underbrace{\vec{0}}_{\in G}$ donc $p(\vec{y}) = \vec{y}$

   Donc $p \circ p(\vec{x}) = p(\vec{x})$, donc $p \circ p = p$
2. $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$: $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow (p - \mathrm{Id}_E)(\vec{x}) = \vec{0} \Leftrightarrow p(\vec{x}) - \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow p(\vec{x}) = \vec{x}$ (vecteur invariant)

   $\forall \vec{y} \in \mathrm{Im}(p)$, $\exists \vec{x} \in E$ tel que $\vec{y} = p(\vec{x})$

   $p(\vec{y}) = p \circ p(\vec{x}) = p(\vec{x}) = \vec{y}$ donc $\vec{y}$ est invariant, donc $\vec{y} \in \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$

   $\mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) \subset F$: $\forall \vec{x} \in \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$, $\vec{x} = p(\vec{x}) \in F$ par définition de p

   $F \subset \mathrm{Im}(p)$: $\forall \vec{x} \in F$, $\vec{x} = \underbrace{\vec{x}}_{\in F} + \underbrace{\vec{0}}_{\in G}$ donc $p(\vec{x}) = \vec{x}$, donc $\vec{x} \in \mathrm{Im}(p)$

   Donc $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) = F$
3. $\forall \vec{x} \in E$, $\exists! (\vec{y}, \vec{z}) \in F \times G$ tel que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, et $p(\vec{x}) = \vec{y}$.

   $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(p) \Leftrightarrow p(\vec{x}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{y} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{z} \Leftrightarrow \vec{x} \in G$.

5.2. Caractérisation des projecteurs

Définition :

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On dit que f est un projecteur s'il existe deux sous-espaces vectoriels F et G supplémentaires de E tels que f est la projection sur F parallèlement à G.

Proposition :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $p \in \mathscr{L}(E)$. Alors p est un projecteur $\Leftrightarrow$ $p \circ p = p$.

Preuve :

$\Leftarrow$: On pose $F = \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$ et $G = \text{Ker}(p)$. F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.

Il suffit alors de montrer que $E = F \oplus G$:

<u>Analyse :</u> Soit $\vec{x} \in E$. On suppose avoir trouvé $(\vec{y}, \vec{z}) \in F \times G$ tel que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$.

$\vec{y} \in F \Leftrightarrow p(\vec{y}) = \vec{y}$ et $\vec{z} \in G \Leftrightarrow p(\vec{z}) = \vec{0}$

$\vec{x} = \vec{y} + \vec{z} \Rightarrow p(\vec{x}) = p(\vec{y}) + p(\vec{z}) = \vec{y} + \vec{0}$ Donc $\vec{y} = p(\vec{x})$ et $z = \vec{x} - p(\vec{x})$

<u>Synthèse :</u> Soit $\vec{x} \in E$. On pose $\vec{y} = p(\vec{x})$ et $\vec{z} = \vec{x} - p(\vec{x})$.

$p(\vec{y}) = p \circ p(\vec{x}) = p(\vec{x}) = \vec{y}$, donc $\vec{y} \in F$. $p(\vec{z}) = p(x) - p \circ p(\vec{x}) = p(\vec{x}) - p(\vec{x}) = \vec{0}$, donc $\vec{z} \in G$.

$\vec{y} + \vec{z} = p(\vec{x}) + \vec{x} - p(\vec{x}) = \vec{x}$ Donc $E = F \oplus G$

$\forall \vec{x} \in E$, $\exists! (\vec{y}, \vec{z}) \in F \times G$ tel que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, et $p(\vec{x}) = \vec{y}$. Donc p est la projection sur $F = \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$ parallèlement à $G = \text{Ker}(p)$.

5.3. Projecteurs associés

Définition :

Deux projecteurs de E, p et q, sont dits associés s'il existe deux sous-espaces vectoriels F et G supplémentaires de E tels que p est la projection sur F parallèlement à G, et q la projection sur G parallèlement à F.

Proposition :

Soient p et $q \in \mathscr{L}(E)$. p et q sont des projecteurs associés $\Leftrightarrow \begin{cases} p + q = \text{Id}_E \\ p \circ q = q \circ p = \vec{x} \mapsto \overrightarrow{0_E} \end{cases}$

Preuve :

$\Rightarrow$: $E = F \oplus G$ donc $\forall \vec{x} \in E$, $\exists! (\vec{y}, \vec{z}) \in F \times G$ tel que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. $p(\vec{x}) = \vec{y}$ et $q(\vec{x}) = \vec{z}$.

$p(\vec{x}) + q(\vec{x}) = \vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$ donc $p + q = \text{Id}_E$.

$p \circ q(\vec{x}) = p(\vec{z}) = \vec{0}$ $(G = \text{Ker}(p))$ $q \circ p(\vec{x}) = q(\vec{y}) = \vec{0}$ $(F = \text{Ker}(q))$

$\Leftarrow$: $p + q = \text{Id}_E \Rightarrow p \circ (p + q) = p \circ \text{Id}_E \Rightarrow p \circ p + p \circ q = p \Rightarrow p \circ p = p \Rightarrow p$ est un projecteur. De même pour q.

$p(\vec{x}) = \vec{0} \Leftrightarrow -p(\vec{x}) = \vec{0}$ donc $\text{Ker}(p) = \text{Ker}(-p)$. Or, $-p = q - \text{Id}_E$, donc $\text{Ker}(p) = \text{Ker}(q - \text{Id}_E)$.

De même, $\text{Ker}(q) = \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$, ce qui prouve que les projecteurs sont associés.

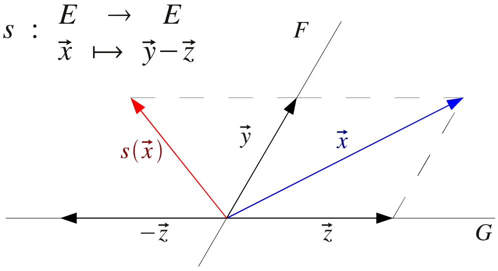
5.4. Symétries

Définition :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaire de E :

$\forall \vec{x} \in E$, $\exists! (\vec{y}, \vec{z}) \in F \times G$ tel que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$

On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'application s : $\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{y} - \vec{z} \end{array}$



Propriété :

Si on note p la projection sur F parallèlement à G, $p(\vec{x}) = \vec{y}$

$s(\vec{x}) = \vec{y} - \vec{z} = 2\vec{y} - \vec{x} = 2p(\vec{x}) - \vec{x}$ Donc $s = 2p - \text{Id}_E$.

Proposition :

1. s est linéaire
2. $s\circ s=\mathrm{Id}_E$
3. $F=\mathrm{Ker}(s-\mathrm{Id}_E)$
4. $G=\mathrm{Ker}(s+\mathrm{Id}_E)$

Preuve :

1. s est liénaire par combinaison d'applications linéaires.
2. $s\circ s=(2p-\mathrm{Id}_E)\circ(2p-\mathrm{Id}_E)=4p\circ p-4p+\mathrm{Id}_E=4p-4p+\mathrm{Id}_E=\mathrm{Id}_E$
3. $\vec{x}\in F \Leftrightarrow p(\vec{x})=\vec{x} \Leftrightarrow 2p(\vec{x})-\vec{x}=\vec{x} \Leftrightarrow s(\vec{x})=\vec{x}$ Donc $F=\mathrm{Ker}(s-\mathrm{Id}_E)$
4. $\vec{x}\in G \Leftrightarrow p(\vec{x})=\vec{0} \Leftrightarrow 2p(\vec{x})-\vec{x}=-\vec{x} \Leftrightarrow s(\vec{x})=-\vec{x}$ Donc $G=\mathrm{Ker}(s+\mathrm{Id}_E)$

Proposition :

Si $s\in\mathscr{L}(E)$ et $s\circ s=\mathrm{Id}_E$, alors :

1. $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{Id}_E)\oplus\mathrm{Ker}(s+\mathrm{Id}_E)=E$
2. s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{Id}_E)$ dans la direction de $\mathrm{Ker}(s+\mathrm{Id}_E)$.

Preuve :

1. On pose $p=\dfrac{s+\mathrm{Id}_E}{2}\in\mathscr{L}(E)$

   $p\circ p=\dfrac{(s+\mathrm{Id}_E)\circ(s+\mathrm{Id}_E)}{4}=\dfrac{s\circ s+2s+\mathrm{Id}_E}{4}=\dfrac{s+\mathrm{Id}_E}{2}=p$ Donc p est la projection sur $F=\mathrm{Ker}(p-\mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $G=\mathrm{Ker}(p)$.

   $\mathrm{Ker}(p-\mathrm{Id}_E)=\mathrm{Ker}(s-\mathrm{Id}_E)=F$ $\mathrm{Ker}(p)=\mathrm{Ker}(s+\mathrm{Id}_E)=G$ Donc $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{Id}_E)\oplus\mathrm{Ker}(s+\mathrm{Id}_E)=E$
2. $\vec{x}=\underbrace{\vec{y}}_{\in F}+\underbrace{\vec{z}}_{\in G}$, $s(\vec{x})=s(\vec{y}+\vec{z})=s(\vec{y})+s(\vec{z})=\vec{y}-\vec{z}$ Donc s est la symétrie par rapport à F dans la direction de G.

* * * * *